МЕХАНИКА
MECHANICS







УДК 517.956.223
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-1-17-25

Научная статья



К вопросу о построении математических моделей мембранной теории выпуклых оболочек

Е.В. Тюриков
Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация, пл. Гагарина, 1
✉ etyurikov@hotmail.com

Аннотация
Введение. В работе рассмотрены вопросы построения математических моделей безмоментного состояния напряженного равновесия упругих выпуклых оболочек с использованием методов комплексного анализа. При этом впервые рассмотрены оболочки с кусочно-гладкой (ребристой) боковой поверхностью. Целью работы являлось отыскание классов оболочек, для которых возможно построение содержательных математических моделей.
Материалы и методы. С помощью методов теории разрывной задачи Римана-Гильберта для обобщённых аналитических функций получен критерий безусловной разрешимости соответствующей статической задачи для уравнения равновесия выпуклой оболочки с ребристой боковой поверхностью. Этот критерий в сочетании с методами теории обобщённых аналитических функций представляет собой инструмент построения математических моделей состояния безмоментного напряжённого равновесия упругих выпуклых оболочек.
Результаты исследования. Разработан метод построения математических моделей безмоментного состояния напряжённого равновесия выпуклой оболочки при действии переменной внешней нагрузки и условии концентрации напряжений в угловых точках срединной поверхности. Введение в граничное условие векторного параметра, а также понятий «порядок квазикорректности» и «квазиустойчивость» позволяют провести как количественное, так и качественное сравнение математических моделей. Найдены классы оболочек, для которых описание математических моделей дается в терминах геометрии границы в окрестности угловых точек срединной поверхности. Полученный результат в применении к пологим выпуклым оболочкам позволяет дать геометрический критерий квазиустойчивости. Установлено, что для пологой оболочки, не являющейся квазиустойчивой, единственной адекватной математической моделью является вероятностная.
Обсуждение и заключения. Предлагаемый метод построения двухпараметрического семейства задач с модифицированным граничным условием позволяет моделировать состояние безмоментного напряженного равновесия для достаточно широких классов выпуклых оболочек с кусочно-гладкой боковой поверхностью при условии втулочной связи. При этом разработанный алгоритм вычисления индекса граничного условия позволяет ответить на вопрос о существовании адекватной математической модели для оболочки с боковой поверхностью произвольной конфигурации, а для оболочек специального вида (например, пологих или оболочек вращения) — сформулировать геометрический критерий существования математической модели.

Ключевые слова: тонкая упругая оболочка, обобщенная аналитическая функция, задача Римана-Гильберта, индекс граничного условия, математическая модель.

Благодарности. Автор выражает признательность коллективу кафедры «Теоретическая и прикладная механика» Донского государственного технического университета за обсуждение результатов работы, также благодарность доктору технических наук, профессору А. Н. Соловьёву за профессиональную поддержку при написании работы.

Для цитирования. Тюриков Е.В. К вопросу о построении математических моделей мембранной теории выпуклых оболочек. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2023;23(1):17–25. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-1-17-25

Original article

On the Construction of Mathematical Models of the Membrane Theory of Convex Shells

Evgeniy V Tyurikov
Don State Technical University, 1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, Russian Federation
✉ etyurikov@hotmail.com

Abstract
Introduction. The paper considers the issues of constructing mathematical models of the momentless equilibrium stress state of elastic convex shells using methods of the complex analysis. At the same time, shells with a piecewise smooth (ribbed) lateral surface were considered for the first time. The work objective was to find classes of shells for which it is possible to build meaningful mathematical models.
Materials and Methods. Using the methods of the theory of the discontinuous Riemann-Hilbert problem for generalized analytic functions, a criterion for the unconditional solvability of the corresponding static problem for the equilibrium equation of a convex shell with a ribbed lateral surface has been obtained. This criterion, combined with the methods of the theory of generalized analytical functions, is a tool for constructing mathematical models of the state of momentless stress equilibrium of elastic convex shells.
Results. A method has been developed for constructing mathematical models of the momentless equilibrium stress state of a convex shell under the action of a variable external load and the condition of stress concentration at the corner points of the median surface. The introduction of a vector parameter, as well as the concepts of "order of quasi-correctness" and "quasi-stability", into the boundary condition provided both quantitative and qualitative comparison of mathematical models. Classes of shells have been found for which the description of mathematical models is given in terms of the geometry of the boundary in the vicinity of the corner points of the median surface. The obtained result, when applied to shallow convex shells, provides a geometric criterion of quasi-stability. It is established that for a shallow shell, which is not quasi-stable, the only adequate mathematical model is a probabilistic one.
Discussion and Conclusions. The proposed method for constructing a two-parameter family of problems with a modified boundary condition makes it possible to simulate the momentless equilibrium stress state for fairly wide classes of convex shells with a piecewise-smooth lateral surface under a sleeve connection. At the same time, the developed algorithm for calculating the boundary condition index allowed us to answer the question of the existence of an adequate mathematical model for a shell with a side surface of an arbitrary configuration, and for shells of a special type (specifically, shallow or shells of revolution), to formulate a geometric criterion for the existence of a mathematical model.

Keywords: thin elastic shell, generalized analytic function, Riemann-Hilbert problem, index of boundary value condition, mathematical model.

Acknowledgements. The author would like to thank the staff of the Theoretical and Applied Mechanics Department, Don State Technical University, for discussing the results of the work, and professor A. N. Solovyov, Dr.Sci. (Engineering), for professional support in writing the work.

For citation. Tyurikov EV. On the Construction of Mathematical Models of the Membrane Theory of Convex Shells. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2023;23(1):17–25. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-1-17-25

Введение. Рассмотренные в работе вопросы изучались и описывались еще в работах И. Н. Векуа [1, 2] и А. Л. Гольденвезера [3, 4], положивших начало применению методов теории обобщенных аналитических функций к безмоментной (мембранной) теории тонких упругих оболочек и теории изгибаний поверхностей. К настоящему времени окончательные результаты в этом направлении получены для выпуклых оболочек с гладким краем (т.е. с гладкой границей её серединной поверхности). Наиболее значимые из них — корректность и квазикорректность основной задачи со статическим граничным условием с односвязной и многосвязной серединными поверхностями — есть следствия того факта, что индекс соответствующей задачи Римана-Гильберта является инвариантом связности поверхности. Применение автором методов И. Н. Векуа к

задачам теории выпуклых оболочек с кусочно-гладким краем[1] [5, 6] выявило связь между «геометрией» срединной поверхности в окрестности её угловой точки и картиной разрешимости соответствующих задач Римана-Гильберта с разрывным коэффициентом граничного условия. Использование этих методов в работах [7–9] позволило получить эффективную формулу для индекса при некоторых дополнительных геометрических условиях на угловые точки поверхности, и, как следствие, геометрический критерий квазикорректности основной граничной задачи.

Цель настоящей работы — построение математических моделей безмоментного состояния напряжённого равновесия выпуклых оболочек с ребристыми боковыми поверхностями на основе геометрического критерия квазикорректности основной граничной задачи.

Материалы и методы. Пусть S — односвязная поверхность заданного класса регулярности [7] с кусочно-гладким краем $L=\bigcup_{j=1}^{n} L_j$ и угловыми точками p_i $(i=1,...,n)$. Зададим на S вдоль L кусочно-непрерывное векторное поле $\mathrm{r}=\{\alpha(s),\beta(s)\}$, допускающее разрывы первого рода в точках p_j, где $\alpha(s)$, $\beta(s)$ ($\alpha^2+\beta^2=1$, $\beta\geq 0$) — касательная и нормальная составляющие, s — натуральный параметр, и обозначим через J заданный в [9] гомеоморфизм поверхности S_0 на комплексную плоскость $z=x+iy$. Пусть область $D=J(S)$ — образ поверхности при отображении на плоскость z с границей Γ и угловыми точками $q_i=J(p_i)$. Рассмотрим следующую задачу (задача R): найти в области D комплекснозначное решение $w(z)$ уравнения:

$$w_{\bar{z}}(z)-B(z)\overline{w}(z)=F(z),\quad z\in D, \tag{1}$$

удовлетворяющее условию Римана–Гильберта

$$\operatorname{Re}\{\lambda(\zeta),w(\zeta)\}=\gamma(\zeta),\quad \zeta\in\Gamma, \tag{2}$$

где

$$\lambda(\zeta)=s(\zeta)\left[\beta(\zeta)t(\zeta)-\alpha(\zeta)s(\zeta)\right], \tag{3}$$

$s(\zeta)=s_1(\zeta)+is_2(\zeta)$, $t(\zeta)=t_1(\zeta)+it_2(\zeta)$, $i^2=-1$, s_i, t_i $(i=1,2)$ — вещественнозначные функции, комплекснозначные функции $\gamma(\zeta)$, $\lambda(\zeta)$ гёльдеровы на каждой из дуг $\Gamma_j=J(L_j)$, $w_{\bar{z}}=\frac{1}{2}(w_x+iw_y)$, $B(z)$, $F(z)$ — функции класса $L_r(D)$, $r>2$. При этом предполагается, что решения класса $W^{1,r}$ в точках разрыва q_i допускают «интегрируемую бесконечность» т.е. допускают оценку $|w(z)|<\mathrm{const}\cdot|z-q_i|^{-\alpha_j}$, $0<\alpha_j<1$. Следуя [10], класс таких решений обозначим через H^*.

Как известно [11], статическая граничная задача безмоментной теории для упругой выпуклой оболочки с ребристой боковой поверхностью в математической постановке есть задача R, где $w(z)$ — комплексная функция напряжений, $F(z)$ — комплекснозначная функция внешней нагрузки. При этом условие $w\in H^*$ равносильно условию концентрации напряжений в угловых точках срединной поверхности.

Построение математической модели состояния равновесия оболочки проведём на основе результатов о разрешимости задачи R для поверхности специального вида (канонического купола [9]). Для упрощения изложения будем считать, что в каждой угловой точке направление одной из дуг совпадает с одним из главных направлений k_2 (k_1) и называть купол 2-каноническим (1-каноническим). Задачу R для канонического купола K назовём канонической, если направление поля r в каждой угловой точке p есть направление обобщённой касательной [7, с. 46]. Введём обозначения: δ_i^2 — отношение соответствующих главных кривизн k_1, k_2 в точке p_i $(0<\delta_i<1)$, $p(\nu_i)$ — угловая точка p_i с внутренним углом ν_i, $T(\nu_i)$ — множество (*сектор*) направлений *обобщённой* касательной в этой точке, T — множество непрерывных на L векторных полей r, задающих в каждой угловой точке $p(\nu_j)$ направление обобщённой касательной. Как установлено в [7], каноническая задача R квазикорректна для любого поля $\mathrm{r}\in T$, если $n\geq 2$. Задача R есть семейство R^{r} задач (1)–(3), каждая

[1] Тюриков Е.В. *Обобщенная граничная задача Гольденвейзера для безмоментных сферических куполов.* В: Современные проблемы механики сплошной среды: тр. XIV межд. конф. Ростов-на-Дону; 2010. С. 290–293.

из которых задаётся выбором векторного поля r. Следуя И. Н. Векуа [1], задачу R^{r} назовём s-квазикорректной в классе H^*, если она безусловно разрешима в этом классе, а её решение зависит от s вещественных произвольных постоянных (s — *порядок квазикорректности*).

Определение 1. Каноническая задача R называется квазиустойчивой относительно поля направлений обобщённой касательной, если задача R^{r} s-квазикорректна для любого поля $\mathrm{r} \in T$.

Замечание 1. В силу теоремы о разрешимости задачи Римана–Гильберта для обобщённых аналитических функций [11] задача R *к*вазиустойчива тогда и только тогда, когда индекс κ задачи R есть инвариант поля $\mathrm{r} \in T$. При этом индексом задачи назовём индекс соответствующей задачи сопряжения с коэффициентом $\Lambda(\zeta) = \bar{\lambda}(\zeta)\lambda^{-1}(\zeta)$. В случае $\kappa \geq -1$, порядок квазикорректности $s = \kappa + 1$.

Ниже используется техника [6, 8] вычисления индекса граничного условия вида (2), а также понятие [10] *особенного узла* p_i задачи (1), (2) или *особенной точки* $q_i = J(p_i)$ разрыва граничного условия (2). Следуя [6], направление обобщённой касательной в угловой точке назовём *особенным*, если соотвествующая точка разрыва граничного условия (2), (3) есть *особенный узел* задачи *R*.

Определение 2. Угловую точку $p(\nu)$ назовём точкой неустойчивости задачи R, если сектор $T(\nu)$ содержит особенное направление.

Введём обозначение: ν, σ — односторонние пределы в угловой точке $p(\nu)$ касательного к L единичного вектора, причём вектор σ задаёт главное направление k_2 на поверхности в точке p, а внутренний угол ν задаётся парой $(-\nu, \sigma)$.

Утверждение 1. Если направление вектора r в точке $p(\nu)$ совпадает с направлением вектора ν, то точка $q = J(p)$ есть особенный узел граничного условия (2) тогда и только тогда, когда:

$$\nu = \arccos\frac{1}{1+\delta}. \tag{4}$$

Если же вектор ν заменить на вектор σ, то:

$$\nu = \operatorname{arcctg}\sqrt{t}, \tag{5}$$

где t — единственный положительный корень уравнения:

$$2\sqrt{\frac{1+\delta^2 t}{\delta^2+t}} + \frac{1+\delta^2 t}{\delta^2+t} - 4\sqrt{\frac{E}{K\left(1+t^2\right)+4Et}} = \frac{1}{t}. \tag{6}$$

Здесь $E = \left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2$, $K = k_1 k_2$ [12, с.164]. *При этом* $\arccos\frac{1}{1+\delta} < \operatorname{arcctg}\sqrt{t}$.

Обозначим

$$\theta = \arccos\frac{1}{1+\delta}, \ \mu = \operatorname{arcctg}\sqrt{t}. \tag{7}$$

Следствием утверждения 1 является утверждение 2.

Утверждение 2. Угловая точка $p(\nu)$ есть точка неустойчивости задачи R тогда и только тогда, когда:

$$\theta \leq \nu \leq \mu. \tag{8}$$

Угловая точка $p(\nu)$ есть точка 1-типа (2-типа), если выполнено условие $0 < \nu < \theta$ $\left(\mu < \nu \leq \frac{\pi}{2}\right)$. Как установлено в [8], точка k-типа $(k = 1, 2)$ есть точка устойчивости. Если $p(\nu)$ — точка неустойчивости, то единственное *особенное* направление r_0 обобщённой касательной разбивает сектор $T(\nu)$ на два связных множества $T^1(\nu)$ и $T^2(\nu)$.

Утверждение 3. Индекс κ задачи R в классе H^* вычисляется по формуле:

$$\kappa = -4 + \sum_{i=1}^{n}(4 - \kappa_i), \tag{9}$$

где n *— число угловых точек границы,* $\kappa_i = m$ *для точки устойчивости* $p(\nu)$ m*-типа* $(m = 1, 2)$*, и* $\kappa_i = s$ *в случае* $\mathrm{r} \in T^{(s)}(\nu)$ $(s = 1, 2)$ *для точки* $p(\nu)$ *неустойчивости.*

Замечание 2. Формула (9) для индекса задачи R в классе H_0 ограниченных решений согласно [10] принимает вид:

$$\kappa = -4 + \sum_{i=1}^{n}(3 - \kappa_i). \qquad (10)$$

Отметим, что условие принадлежности решения задачи R классу H^* есть условие ограниченности интеграла энергии растяжения оболочки [13, с. 83] в окрестности угловой точки.

Из формул (9), (10) следует утверждение 4.

Утверждение 4. Если граница L *содержит единственную угловую точку 1-типа, то задача* R *безусловно разрешима в классе* H^* *и имеет единственное решение* $\forall \mathrm{r} \in T$*; если* $n \geq 2$, $n = n_1 + n_2$*, где* n_k *— число угловых точек* k *- типа* $(k = 1, 2)$*, то задача* R *квазиустойчива относительно* $\mathrm{r} \in T$ *с порядком квазикорректности* $s = 2n_1 + n_2 - 3$.

Если граница L содержит точки неустойчивости, то согласно (9) задача R в классе H^* не является квазиустойчивым относительно поля $\mathrm{r} \in T$. Однако можно выделить такие классы полей, относительно которых задача R является квазиустойчивой с различными порядками квазикоретности. Классы таких полей можно задавать, выбирая в каждой точке неустойчивости $p(\nu)$ направление обобщённой касательной только в одном из секторов $T^{(1)}(\nu)$, $T^{(2)}(\nu)$.

Замечание 3. Как нетрудно убедиться, формулы (9), (10) вместе с утверждением 4 справедливы и в случае:

$$\mu < \nu \leq \frac{\pi}{2} + \omega^2, \qquad (11)$$

где ω — достаточно малая величина, заданная поверхностью S. При этом условие малости ω не является обязательным. Например, для омбилической $(k_1 = k_2)$ точки $p(\nu)$ достаточно положить $\omega^2 = \frac{\pi}{6}$.

Рассмотрим теперь 1-канонический купол K. В этом случае описание особенных узлов граничного условия (2) также даётся утверждением 2 с той лишь разницей, что в равенстве (4) и уравнении (6) величину $\delta^2 = \frac{k_2}{k_1} < 1$ необходимо заменить на $\delta^2 = \frac{k_1}{k_2} > 1$. При этом для угловой точки $p(\nu)$ неустойчивости задачи R неравенство (8) принимает вид:

$$\mu \leq \nu \leq \arccos\frac{1}{1+\delta}. \qquad (12)$$

На основании очевидного графического анализа уравнения (6) заключаем:

1° величина $\mu = \operatorname{arcctg}\sqrt{t}$ есть функция двух параметров, а именно: $\mu = \mu(\delta, k_1)$, $k_1 \in (0; +\infty)$, если $\delta^2 = \frac{k_2}{k_1} < 1$, и $\mu = \mu(\delta, k_2)$, $k_2 \in (0; +\infty)$, если $\delta^2 = \frac{k_1}{k_2} > 1$;

2° $\lim\limits_{\delta \to 1-0} \mu(\delta, k_1) = \frac{\pi}{3}$, $\lim\limits_{\delta \to 0} \mu(\delta, k_1) = \frac{\pi}{2}$ $\forall k_1 \in (0; +\infty)$, если $\delta^2 = \frac{k_2}{k_1}$;

3° $\lim\limits_{\delta \to 1+0} \mu(\delta, k_2) = \frac{\pi}{3}$, $\lim\limits_{\delta \to +\infty} \mu(\delta, k_2) = 0$ $\forall k_2 \in (0; +\infty)$, если $\delta^2 = \frac{k_1}{k_2}$;

4° для любого фиксированного δ из правой (левой) полуокрестности единицы функция μ как функция аргумента k_2 (k_1) есть медленно меняющаяся функция [14] в том смысле, что $\mu(\delta_0, k_j) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ для любого фиксированного $\delta = \delta_0$, $k_j \in (0; +\infty)$ $(j = 1, 2)$.

Результаты исследования. Введём в рассмотрение семейство поверхностей S_τ, $\tau \in [0, \varepsilon)$, где τ — малый параметр, каждый их которых есть срединная поверхность тонкой упругой оболочки V_τ из некоторого семейства $\{V_\tau\}$, причём V_0 и S_0 совпадают с оболочкой V и поверхностью S соответственно. Будем полагать, что для $\forall \tau \in [0, \varepsilon)$ выполнены следующие условия:

1) поверхность S_τ есть канонический купол класса регулярности $W^{3,r}$, $r>2$, с внутренними углами величины ν_j в угловых точках p_i $(i=1,...,n)$ границы L_τ, причём поверхность S_0 есть 2-канонический (1-канонический) купол S с границей L;

2) отношения главных кривизн $k_1^{(\tau)}$, $k_2^{(\tau)}$ поверхности S_τ в угловых точках совпадают с величинами δ^2 в угловых точках поверхности S;

3) $k_j^{(\tau)}=k_j+\varepsilon_j(\tau)$, где $\lim\limits_{\tau\to 0}\varepsilon_j(\tau)=0$, $k_j=k_j^{(0)}$ $(j=1,2)$.

Пусть J — отображение поверхности S_τ на комплексную плоскость $z=x+iy$, заданное выше, $D_\tau=J(S_\tau)$ — семейство ограниченных в плоскости z односвязных областей с соответствующими $\Gamma_\tau=J(L_\tau)$ и угловыми точками $q_i=J(p_i)$. Рассмотрим семейство задач R_τ, $\tau\in[0,\varepsilon)$,

$$w_{\bar z}(z)-B_\tau(z)\overline{w}(z)=F_\tau(z),\quad z\in D_\tau, \tag{13}$$

$$\operatorname{Re}\{\lambda_\tau(\zeta)w(\zeta)\}=\gamma_\tau(\zeta),\quad \zeta\in\Gamma_\tau, \tag{14}$$

в котором функции $B_\tau(z)$, $\lambda_\tau(\zeta)$, $\gamma_\tau(\zeta)$ определены серединной поверхностью S_τ оболочки V_τ согласно [8], причём $\lambda_\tau(\zeta)$ имеет вид (3).

Предполагается, что боковые поверхности оболочек V_τ имеют общие рёбра, содержащие точки p_i $(i=1,...,n)$. Отметим, что задачу (13), (14) $\forall\tau\in[0,\varepsilon)$ можно рассматривать как семейство задач $R_\tau^{(\mathrm{r})}$, каждая из которых задаётся выбором векторного поля на S_τ вдоль L_τ.

Рассмотрим 1-канонический купол S. Справедливо утверждение 4.

Утверждение 4. Если в каждой из угловых точек $p(\nu)$ купола S выполняется условие:

$$\nu<\arccos\frac{1}{1+\delta}, \tag{15}$$

то $\forall\tau\in[0,\varepsilon)$ задача R_τ квазиустойчива H^* относительно поля направлений обобщённой касательной с порядком квазикорректности $s=3n-3$. Если же в каждой точке $p(\nu)$ выполнено условие:

$$\operatorname{arcctg}\sqrt{t}+\omega_0^2<\nu<\frac{\pi}{2}+\omega^2, \tag{16}$$

где ω^2 определено замечанием 3, величина $\omega_0=\omega_0(\varepsilon)$ задана семейством S_τ, $\tau\in[0,\varepsilon)$, то задача R_τ квазиустойчива в классе H^* с порядком квазикорректности $s=2n-3$.

Для доказательства достаточно воспользоваться утверждением 3, условиями 1–3 и известными свойствами [1, с. 97] отображения J. Утверждение 4 остаётся в силе для 2-канонического купола S, если условия (15), (16) заменить условиями:

$$\nu<\operatorname{arcctg}\sqrt{t}-\omega_0^2, \tag{17}$$

$$\arccos\frac{1}{1+\delta}<\nu<\frac{\pi}{2}+\omega^2 \tag{18}$$

соответственно.

Уточним теперь понятие угловой точки k-типа $(k=1,2)$ поверхности S. Будем говорить, что точка $p(\nu)$ границы Γ есть точка 1-типа (2-типа) относительно семейства S_τ, $\tau\in[0,\varepsilon)$, если выполняются условия (15) и (17) для 1-канонической и 2-канонической точек соответственно (условия (16) и (18) для 1-канонической и 2-канонической точек соответственно). Рассмотрим канонический купол S, каждая угловая точка которого есть точка 1-типа или 2-типа относительно указанного семейства S_τ. Тогда следствием утверждения 4 является

Утверждение 5. Если p и q — число точек 1-типа и 2-типа соответственно $(p+q=n)$, то $\forall\tau\in[0,\varepsilon)$ задача R_τ безусловно разрешима в классе H^* и квазиустойчива относительно направлений r *обобщённой касательной с порядком квазикорректности $s=3p+2q-3$. В частности, если $p=0$, то $q\ge 2$.*

Утверждение остаётся в силе, если класс H^* заменить классом H_0 ограниченных в D_τ решений, а порядок $s=3p+2q-3$ порядком $s=2p+q-3$ при условии $2p+q\ge 3$. Таким образом, задача R_τ не является безусловно разрешимой в случаях: $p=0$, $q\le 2$ и $p=1$, $q=1$.

Случай омбилической $(\delta = 1)$ угловой точки $p(\nu)$, в которой любое направление является главным, требует специального рассмотрения. В этом случае согласно[2] $\mu = \theta = \frac{\pi}{3}$, а любое направление обобщённой касательной есть особенное направление задачи R. Однако и в этом случае утверждение 4 остаётся справедливым, если для семейства $\{S_\tau\}$ считать $\tau \neq 0$, а величины ν, μ заменить величиной $\frac{\pi}{3}$.

Обсуждение и заключения. Полученные результаты могут быть использованы для построения математических моделей тонких и пологих оболочек положительной гауссовой кривизны с ребристыми боковыми поверхностями. Наиболее полные и продвинутые результаты как линейной, так и нелинейной теории упругих оболочек получены для тонких пологих оболочек. Детальное обсуждение понятия «пологая оболочка», а также описание различных вариантов теории приводится в [15, с. 29]. Линейная теория пологих выпуклых разработана И. Н. Векуа [2, 16]. В рамках этой теории вопрос о реализации состояния напряжённого равновесия пологой оболочки с ребристой боковой поверхностью при выполнении статического граничного условия общего вида сводится к задаче R, рассмотренной выше.

Пусть P — пологая оболочка [2, с. 164] с ребристой боковой поверхностью, S — её срединная поверхность с кусочно-гладким краем. Будем полагать, что в каждой угловой точке поверхности S выполняется условие *усиленной пологости* $k_1 \approx k_2$, которое равносильно следующему:

$$\delta \approx 1, \tag{19}$$

где δ — любое из соотношений $\frac{k_1}{k_2}$, $\frac{k_2}{k_1}$. Условие (19) означает, что любую угловую точку $p(\nu)$ следует считать как 1-каноничекой, так и 2-канонической точкой. Рассмотрим угловую точку $p(\nu)$, в которой $\nu \approx \frac{\pi}{3}$, и семейство поверхностей S_τ, $\tau \in [0, \varepsilon)$, заданное условиями (1)–(3). Согласно свойствам 1°–4° величин θ, μ и утверждению 2 соответствующая задача R_τ $\forall \tau \in (0, \varepsilon)$ не является квазиустойчивой в классе H^*, то есть точка $p(\nu)$ при $\nu \approx \frac{\pi}{3}$ — точка неустойчивости задачи R_τ. В этом случае естественно предполагать, что в правой части формулы (10) соответствующая точке $p(\nu)$ величина κ_i $(1 \le i \le n)$ есть дискретная случайная величина с возможными значениями 1 и 2. Таким образом, если в каждой угловой точке $p(\nu)$ серединной поверхности выполнено условие $\nu \approx \frac{\pi}{3}$, то в силу формулы (9) порядок квазикорректности задачи R есть дискретная случайная величина, принимающая значения m, $m+1, \ldots$, $m+n$, где n — число угловых точек, $m = 2n-3$ для класса решений H^*, и $m = n-3$ для класса H_0.

Предлагаемый выше метод может быть использован для построения математических моделей теории тонких пологих оболочек с ребристыми боковыми поверхностями любой конфигурации. Для этого достаточно воспользоваться результатами[3] о разрешимости задачи R для сферических куполов с кусочно-гладким краем. Рассмотрим для определённости срединную поверхность S в предположении, что все угловые точки $p(\gamma)$ границы — «выходящие», то есть $\gamma < \pi$. В этом случае угловая точка на сферической поверхности есть особенный узел граничного условия тогда и только тогда, когда $\gamma = \frac{\pi k}{3}$ $(k = 1, \ldots, 5)$. Отсюда следует, что «выходящая» угловая точка срединной поверхности пологой оболочки есть точка неустойчивости, если выполнено одно из следующих условий: $\gamma \approx \frac{\pi k}{3}$ $(k = 1, 2)$. Таким образом, формула (9) для индекса может служить обоснованием следующей гипотезы:

если задача R для пологой выпуклой оболочки безусловно разрешима в заданном классе решений, то её порядок квазикорректности есть дискретная случайная величина, принимающая целые значения K, $K+1, \ldots$, $K+N$, где N — число точек неустойчивости; K — число, заданное набором угловых точек и выбором непрерывного векторного параметра r.

[2] Тюриков Е. В. Обобщенная граничная задача Гольденвейзера для безмоментных сферических куполов.

[3] То же.

В заключении отметим, что обоснованием этой гипотезы могут служить те же рассуждения, но проведённые для регулярных выпуклых поверхностей, удовлетворяющих условию *локальной симметрии* [17] в угловых точках.

Список литературы

1. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* Москва: Физматлит; 1988. 512 с.
2. Векуа И.Н. *Некоторые общие методы построения различных вариантов в теории оболочек.* Москва: Физматлит; 1982. 288 с.
3. Гольденвейзер А.Л. О применении решений задачи Римана–Гильберта к расчету безмоментных оболочек. *Прикладная математика и механика.* 1951;15(2):149–166.
4. Гольденвейзер А.Л. *Теория тонких упругих оболочек*. Москва: Наука; 1976. 512 с.
5. Тюриков Е.В. Краевые задачи теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с кусочно-гладким краем. *Математический сборник.* 1977;103(3):445–462.
6. Тюриков Е.В. Общий случай смешанной граничной задачи мембранной теории выпуклых оболочек. *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: естественные науки*. 2012;2:30–35.
7. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения.* Москва: Физматлит; 1968. 511 с.
8. Векуа И.Н. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек. *Математический сборник.* 1952;31(2):217–314.
9. Tyurikov E.V. The Canonical Form of the Main Boundary Value Problem of the Membrane Theory of Convex Shells. *Global and Stochastic Analysis*. 2020;7:209–218.
10. Tyurikov E.V. A Geometric Analogue of the Vekua–Goldenveizer Problem. *Doklady Mathematics*. 2009;79:83–86. https://doi.org/10.1134/S1064562409010256
11. Tyurikov E.V. One Case of Quasi–Correctness of the Canonical Boundary Value Problem of the Membrane Theory of Convex Shells. *Global and Stochastics Analysis.* 2021;8:45–52.
12. Векуа И.Н. *Основы тензорного анализа и теории ковариантов*. Москва: Физматлит; 1978. 296 с.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Теория упругости*. Москва: Физматлит; 1965. 204 с.
14. Tyurikov E.V., Polyakov A.S. On One Case of Quasi–Correctness of the Static Boundary Value Problem for Shells of Rotation. *Journal of Physics: Conference Series.* 2021;2131:022130. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2131/2/022130
15. Ворович И.И. *Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек.* Москва: Наука; 1989. 376 с.
16. Векуа И.Н. *Теория тонких пологих оболочек переменной толщины*. Тбилиси: Мецниереба; 1965. 101 с.
17. Tyurikov E.V. One Case of Extended Boundary Value Problem of the Membrane Theory of Convex Shells by I. N. Vekua. *Issues of Analysis*. 2021;7(S):153–162. https://doi.org/10.15393/j3.art.2018.5471

References

1. Vekua IN. *Generalized Analytical Functions*. Moscow: Fizmatlit; 1988. 512 p. (In Russ.)
2. Vekua IN. *Nekotorye obshchie metody postroeniya razlichnykh variantov v teorii obolochek*. Moscow: Fizmatlit; 1982. 288 p. (In Russ.)
3. Goldenveizer AL. O primenenii reshenii zadachi Rimana–Gil'berta k raschetu bezmomentnykh obolochek. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1951;15:149–166. (In Russ.)
4. Goldenveizer AL. *Teoriya tonkikh uprugikh obolochek*. Moscow: Nauka; 1976. 512 p. (In Russ.)
5. Tyurikov EV. Boundary Value Problems in the Theory of Infinitesimal Bendings of Surfaces of Positive Curvature with Piecewise Smooth Boundary. *Sbornik*: *Mathematics*. 1977;32:385–400.
6. Tyurikov EV. Obshchii sluchai smeshannoi granichnoi zadachi membrannoi teorii vypuklykh obolochek. *Issledovaniya po sovremennomu analizu i matematicheskomu modelirovaniyu*. 2011;5:225–229. (In Russ.)
7. Muskhelishvili NI. *Singulyarnye integral'nye uravneniya*. Moscow: Fizmatlit; 1968. 511 p. (In Russ.)
8. Vekua IN. Sistemy differentsial'nykh uravnenii pervogo poryadka ehllipticheskogo tipa i granichnye zadachi s primeneniem k teorii obolochek. *Sbornik: Mathematics*. 1952;31:217–314. (In Russ.)
9. Tyurikov EV. The Canonical Form of the Main Boundary Value Problem of the Membrane Theory of Convex Shells. *Global and Stochastic Analysis*. 2020;7:209–218.
10. Tyurikov EV. A Geometric Analogue of the Vekua–Goldenveizer Problem. *Doklady Mathematics*. 2009;79:83–86. https://doi.org/10.1134/S1064562409010256
11. Tyurikov EV. One Case of Quasi–Correctness of the Canonical Boundary Value Problem of the Membrane Theory of Convex Shells. *Global and Stochastics Analysis*. 2021;8:45–52.
12. Vekua IN. *Osnovy tenzornogo analiza i teorii kovariantov*. Moscow: Fizmatlit; 1978. 296 p. (In Russ.)

13. Landau LD, Lifshits EM. *Teoreticheskaya fizika*. *Teoriya uprugosti*. Moscow: Fizmatlit; 1965. 204 p. (In Russ.)

14. Tyurikov EV, Polyakov AS. On One Case of Quasi–Correctness of the Static Boundary Value Problem for Shells of Rotation. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021;2131:022130. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2131/2/022130

15. Voronich II. *Matematicheskie problemy nelineinoi teorii pologikh obolochek*. Moscow: Nauka; 1989. 376 p. (In Russ.)

16. Vekua IN. *Teoriya tonkikh pologikh obolochek peremennoi tolshchiny*. Tbilisi: Metsniereba; 1965. 101 p. (In Russ.)

17. Tyurikov EV. One Case of Extended Boundary Value Problem of the Membrane Theory of Convex Shells by I. N. Vekua. *Issues of Analysis*. 2021;7(S):153–162. https://doi.org/10.15393/j3.art.2018.5471

Об авторе:

Тюриков Евгений Владимирович, профессор кафедры «Высшая математика» Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), доктор физико-математических наук, доцент, ORCID, etyurikov@hotmail.com

Поступила в редакцию 10.01.2023.
Поступила после рецензирования 06.02.2023.
Принята к публикации 08.02.2023.

Конфликт интересов
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Evgeniy V Tyurikov, professor of the Advanced Mathematics Department, Don State Technical University (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), Dr.Sci. (Phys.-Math.), associate professor, ORCID, etyurikov@hotmail.com

Received 10.01.2023.
Revised 06.02.2023.
Accepted 08.02.2023.

Conflict of interest statement
The author does not have any conflict of interest.

The author has read and approved the final manuscript.